Dinamica de Fluidos: Principio de Bernoulli. Aplicaciones

Cuando un fluido está en movimiento, el flujo se puede clasificar en dos tipos:

a) Flujo estacionario o laminar si cada partícula de fluido sigue una trayectoria uniforme y estas no se cruzan, es un flujo ideal. Por ejemplo el humo de cigarrillo justo después de salir del cigarro es laminar. En el flujo estacionario la velocidad del fluido permanece constante en el tiempo. Sobre una velocidad crítica, el flujo se hace turbulento.

b) Flujo turbulento es un flujo irregular con regiones donde se producen torbellinos. Por ejemplo el humo de cigarrillo en la parte superior alejada del cigarro es turbulento.

El flujo laminar se vuelve turbulento por efecto de la fricción que también está presente en los fluidos y surge cuando un objeto o capa del fluido que se mueve a través de él desplaza a otra porción de fluido; lo notas por ejemplo cuando corres en el agua. La fricción interna en un fluido es la resistencia que presenta cada capa de fluido a moverse respecto a otra capa. La fricción interna o roce de un fluido en movimiento se mide por un ***coeficiente de viscosidad η***. Por efecto de la viscosidad parte de la energía cinética del fluido se transforma en energía térmica, similar al caso de los sólidos. Debido a que el movimiento de un fluido real es muy complejo, consideraremos un modelo de fluido ideal con las siguientes restricciones:

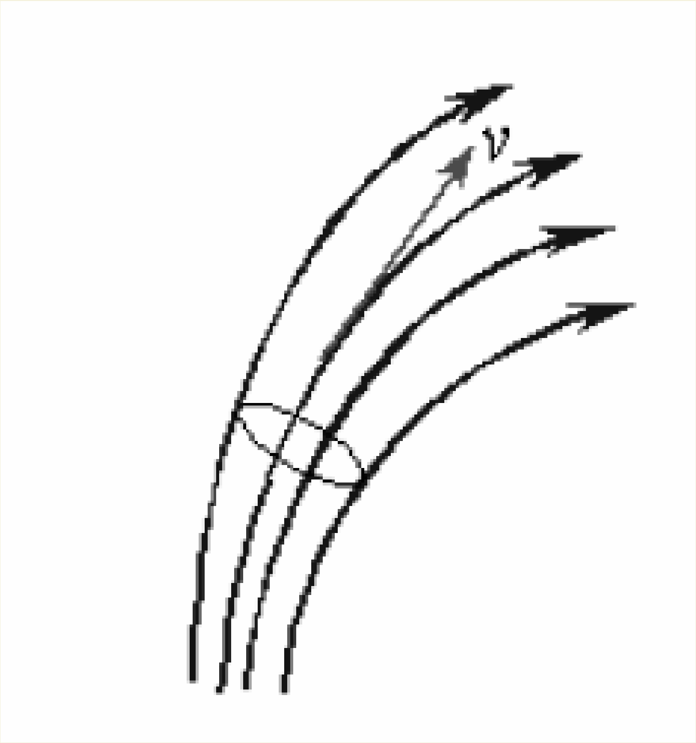
fluido incompresible - densidad constante

flujo estacionario, laminar – la velocidad en cada punto es constante.

rotacional – no tiene momento angular.

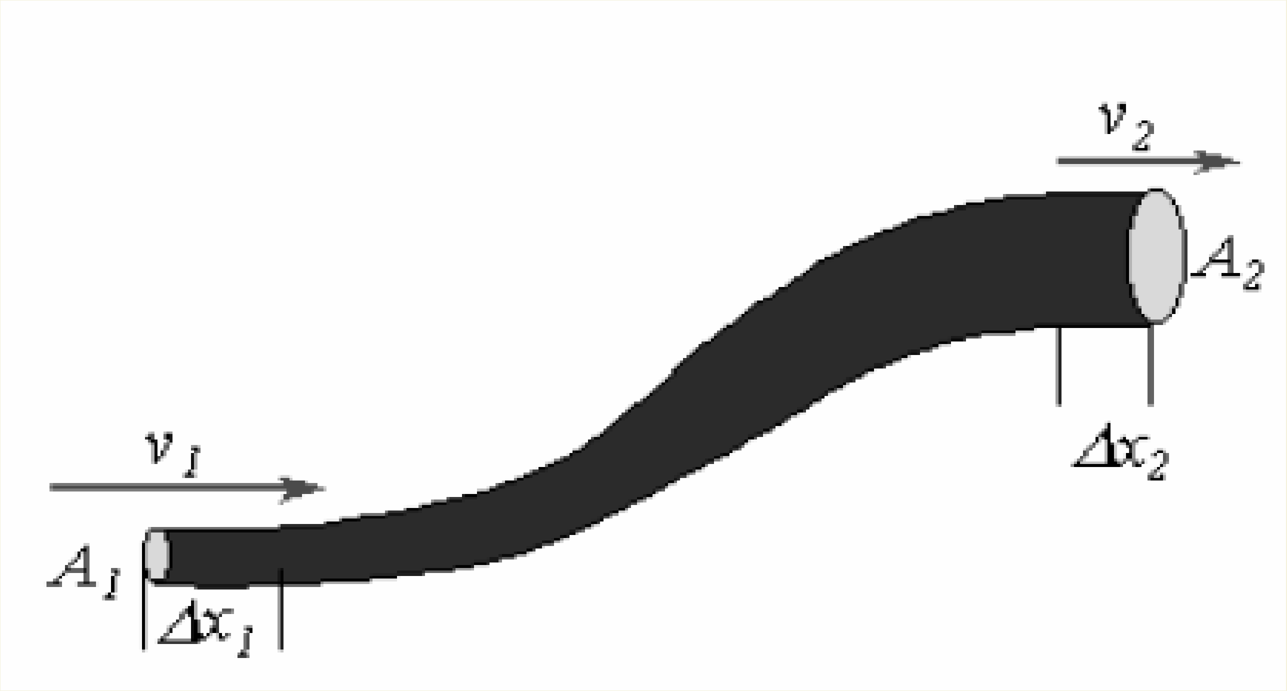
ECUACION DE CONTINUIDAD.

- La trayectoria seguida por una partícula de fluido estacionario se llama ***línea de corriente***, así que por definición la velocidad es siempre tangente a la línea de corriente en cualquier punto. Por lo tanto las líneas de corriente no se pueden cruzar, sino en el punto de cruce, la partícula de fluido podría irse por cualquiera de las líneas y el flujo no sería estacionario. Un conjunto de líneas de corriente forma un tubo de corriente o de flujo, las partículas de fluido se pueden mover sólo a lo largo del tubo, ya que las líneas de corriente no se cruzan.



Considerar un fluido que se mueve a lo largo de un tubo de corriente, cuya sección transversal aumenta en dirección del flujo, como en la figura. En un intervalo Δt en la sección más angosta del tubo de área $A1$, el fluido se mueve una distancia $\Delta x1 = v1\ \Delta t$. La masa contenida en el volumen $A1\ \Delta x1$ es $\Delta m1 = \rho 1 A1\ \Delta x1$. De manera similar, en la sección ancha del tubo de área $A2$, se obtienen expresiones equivalentes en el mismo Δt, cambiando el subíndice 1 por 2.

Pero la masa se conserva en el flujo estacionario, esto es la masa que cruza por $A1$ es igual a la masa que pasa por $A2$ en el intervalo de tiempo Δt.



$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 \Delta x_1 = \rho_2 A_2 \Delta x_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

$$\boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2} \qquad (10.7)$$

Esta se llama ecuación de continuidad, representa la conservación de la masa: significa que la masa no puede ser creada ni destruida, sólo se puede transformar, similar a la conservación de la energía.

Para un fluido incompresible, es decir de densidad constante, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = cte\,,$$

esto es, el producto del área por la rapidez normal a la superficie en todos los puntos a lo largo del tubo de corriente es constante. La rapidez es mayor (menor) donde el tubo es más angosto (ancho) y como la masa se conserva, la misma cantidad de fluido que entra por un lado del tubo es la que sale por el otro lado, en el mismo intervalo de tiempo.
La cantidad *Av,* que en el SI tiene unidades de m^3/s, se llama ***flujo*** de volumen o caudal $Q = Av$.

ECUACION DE BERNOULLI.

Cuando un fluido se mueve por una región en que su rapidez o su altura se modifican la presión también cambia.

La fuerza de la presión $p1$ en el extremo inferior del tubo de área $A1$ es

$$F1 = p1\ A1.$$

El trabajo realizado por esta fuerza sobre el fluido es

$$W1 = F1\ \Delta x1 = p1A1\ \Delta x1 = p1\ \Delta V,$$

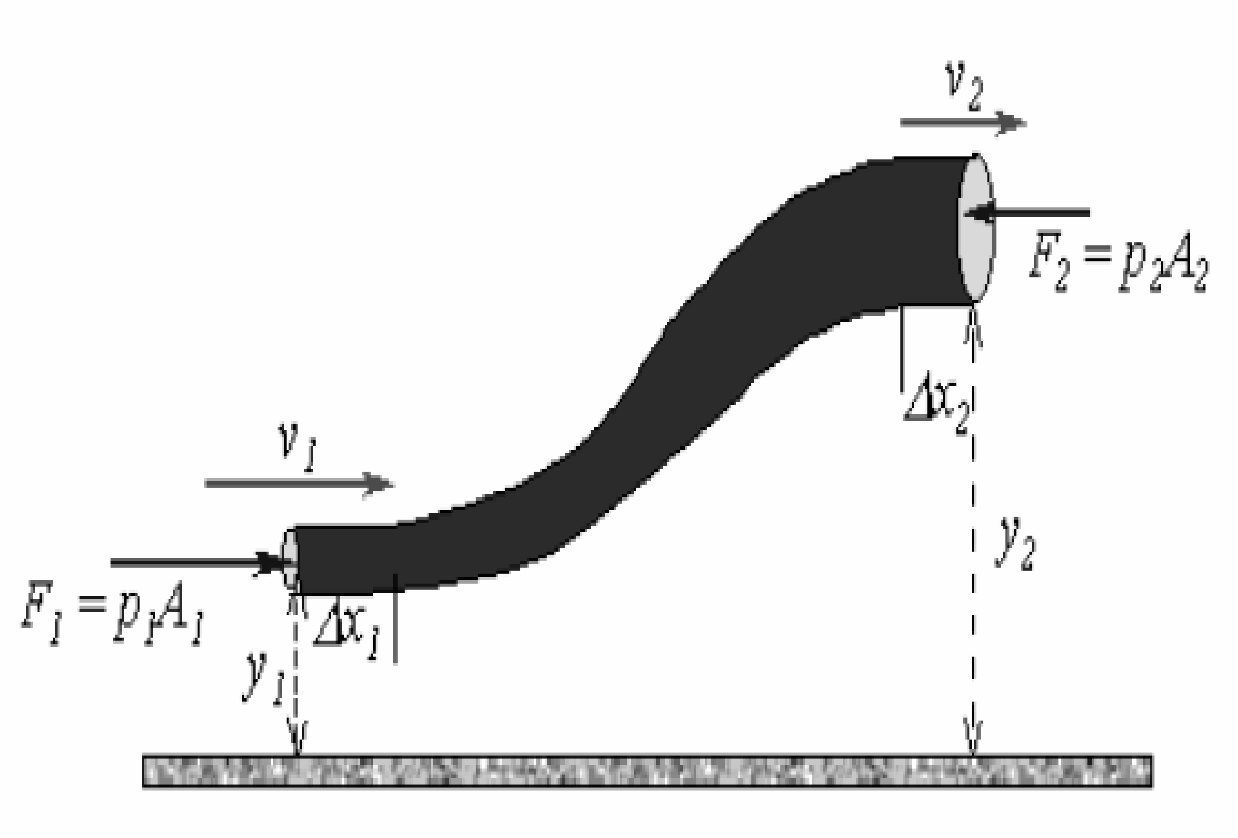
donde ΔV es el volumen de fluido considerado.

De manera equivalente, si se considera un mismo intervalo de tiempo, el volumen ΔV de fluido que cruza la sección superior de área $A2$ es el mismo, entonces el trabajo es

$$W2 = -\ p2A2\ \Delta x1 = -\ p2\ \Delta V.$$

El trabajo neto realizado por las fuerzas en el intervalo de tiempo Δt es:

$$W = W_1 + W_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$



Parte de este trabajo se usa en cambiar tanto la energía cinética como la energía potencial gravitacional del fluido. Si Δm es la masa que pasa por el tubo de corriente en el tiempo Δt, entonces la variación de energía cinética es:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

y la variación de energía potencial gravitacional es:

$$\Delta E_g = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$$

Por el teorema del trabajo y energía se tiene:

$$W = \Delta E_c + \Delta E_g \Rightarrow$$

$$(p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$$

Dividiendo por ΔV y como $\rho = \Delta m/\Delta V$, se obtiene la ecuación de Bernoulli para un fluido no viscoso, incompresible, estacionario e irrotacional.

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

La ecuación de Bernoulli, que es un resultado de la conservación de la energía aplicada a un fluido ideal, generalmente se expresa como:

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = cte.} \qquad (10.8)$$

Ejemplo 10.5: *Demostrar que para un fluido en reposo se obtiene la ecuaciónhidrostática integrada.*

Solución: si el fluido está en reposo, *v1 = v2 = 0* y de la ecuación de Bernoulli se obtiene:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \rho g z_2 - \rho g z_1 = \rho g h \Rightarrow$$

$$p_2 = p_1 - \rho g h$$

Aplicasiones.

Ejemplo 10.6: Tubo de Venturi. *Una tubería horizontal con una estrechez, como se muestra en la figura 10.11, que se usa para medir la velocidad del flujo en fluidos incompresibles, se llama tubo de Venturi. Si con un manómetro se mide la presión en los puntos 1 y 2, se puede calcular la rapidez del flujo que sale (o entra) por el tubo.*

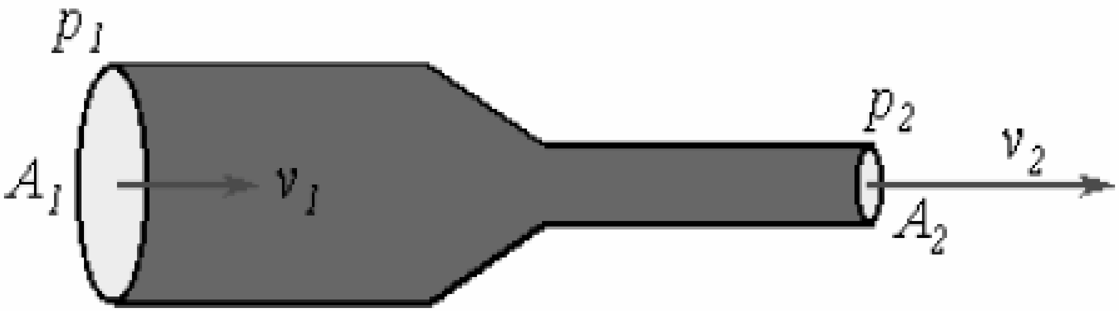


Figura 10.11 Tubo de Venturi.

Solución. Aplicando la ecuación de Bernoulli, como la tubería es horizontal, $y_1 = y_2$, se tiene:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_1 \Rightarrow$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Con la ecuación de continuidad:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Combinando las ecuaciones, queda:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_2}{A_1}v_2\right)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = A_1\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Observar que debido a que $A_1 > A_2$, $p_1 > p_2$, la presión en 1 es mayor que en 2, es decir la presión disminuye en la parte estrecha de la tubería. La disminución de la presión en la parte angosta del tubo tiene varias aplicaciones, por ejemplo, conectando un tubo de Venturi al carburador de un automóvil, se hace entrar el vapor de gasolina a la cámara de combustión.

Ejemplo 10.7: Ley de Torricelli. Un estanque que contiene un líquido de densidad ρ tiene un orificio pequeño en un lado a una altura y_1 del fondo (figura 10.12. El aire por encima del líquido se mantiene a una presión p. Determinar la rapidez con la cual sale el líquido por el orificio cuando el nivel del líquido está a una altura h sobre el agujero.

Solución: si se supone que el estanque tiene una superficie mucho mayor que la del agujero $(A_2 >> A_1)$, entonces la rapidez de descenso del fluido es mucho menor que la rapidez de salida del agua por el hoyo $(v_2 << v_1)$. Aplicando la ecuación de Bernoulli en los puntos 1 y 2, con p_1 = *presión atmosférica* = p_o y $p_2 = p$, se tiene:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \Rightarrow$$

$$p_o + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p + \rho g(y_2 - y_1)$$

Como $h = y_2 - y_1$, se tiene:

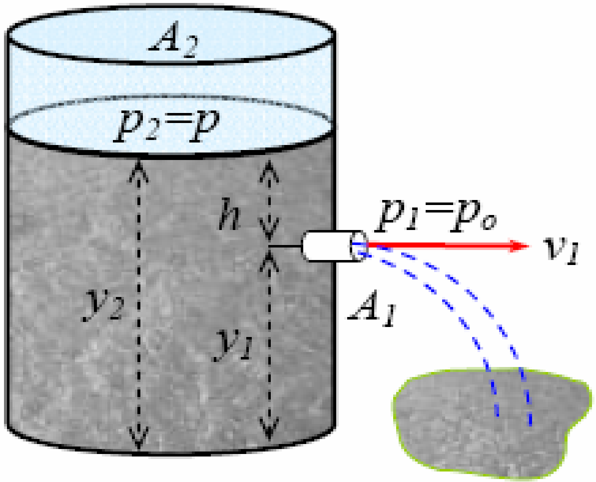


Figura 10.12 Ejemplo 10.7

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p - p_o)}{\rho} + 2gh}$$

Esta ecuación se llama Ley de Torricelli.

Casos particulares:

a) Si $p >> p_o$, entonces $2gh \sim 0$ y $v_1 = \sqrt{2p/\rho}$, esto significa que la rapidez es solo función de la presión.

b) Si $p = p_o$, entonces $v_1 = \sqrt{2gh}$, en este caso la rapidez es idéntica a la adquirida por un cuerpo en caída libre.

Numero de Reynolds

- Para caracterizar el movimiento de un objeto en relación con un fluido se usa numero de Reynolds.

- $Re=(v\rho L)/\eta$

- v- velocidad
- ρ – densidad
- η - viscosidad
- L – longitude de objeto

Ejemplo 10.8: Tubo de Pitot. *Es uno de los medidores más exactos para medir la rapidez de un gas dentro de una tubería. El equipo, que se muestra en la figura 10.13, consta de un tubo en U con un líquido manométrico, donde la rama "a" en la figura 10.13, se conecta a la tubería y la otra rama "b", cuya abertura está dirigida corriente arriba, se deja en el interior por donde circula el gas con rapidez v, de modo que el fluido ingrese dentro de ésta y suba hasta que la presión aumente lo suficiente dentro del mismo y equilibre el impacto producido por la velocidad.*

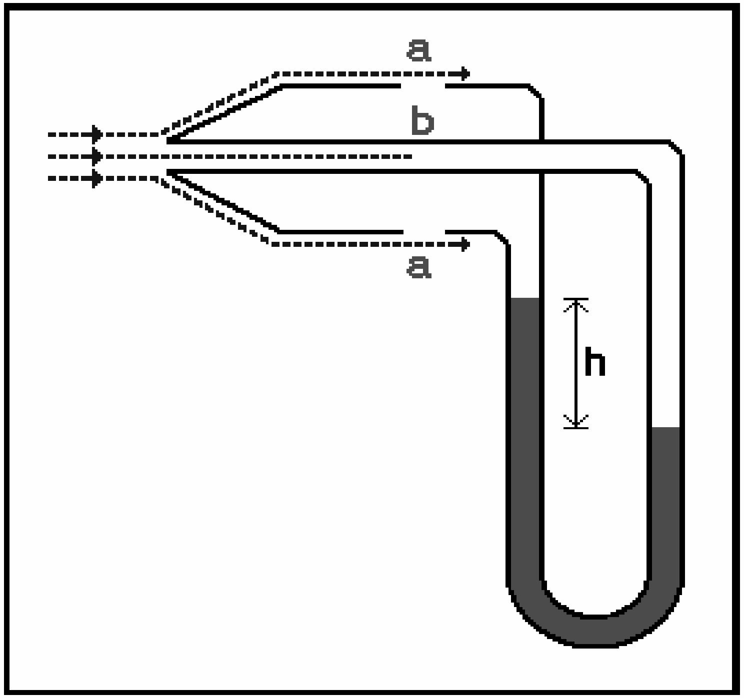


Figura 10.13.Tubo de Pitot.

La presión p_a en la rama a izquierda del tubo, cuya abertura es paralela al movimiento del gas, es igual a la presión del gas. La presión p_b de la otra rama b puede calcularse aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos en a y b, que se consideran ubicados a una misma altura dentro de la tubería. Como la rapidez en el punto b es nula:

$$p_b = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2$$

donde ρ es la densidad del gas. Por otra parte, la $p_b > p_a$ por lo que el líquido manométrico dentro del tubo en U se desplaza originando una diferencia de altura h. Sea ρ_o la densidad del líquido manométrico, por lo que:

$$p_b = p_a + \rho_o g h$$

combinando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\rho_o g h = \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_o g h}{\rho}}$$

Los aviones usan sistemas basados en este equipo para determinar su velocidad respecto al aire.

Ejemplo 10.1. *Calcular la fuerza resultante ejercida por el agua sobre una represa de profundidad H y de ancho D, que se muestra en la figura 10.5.*

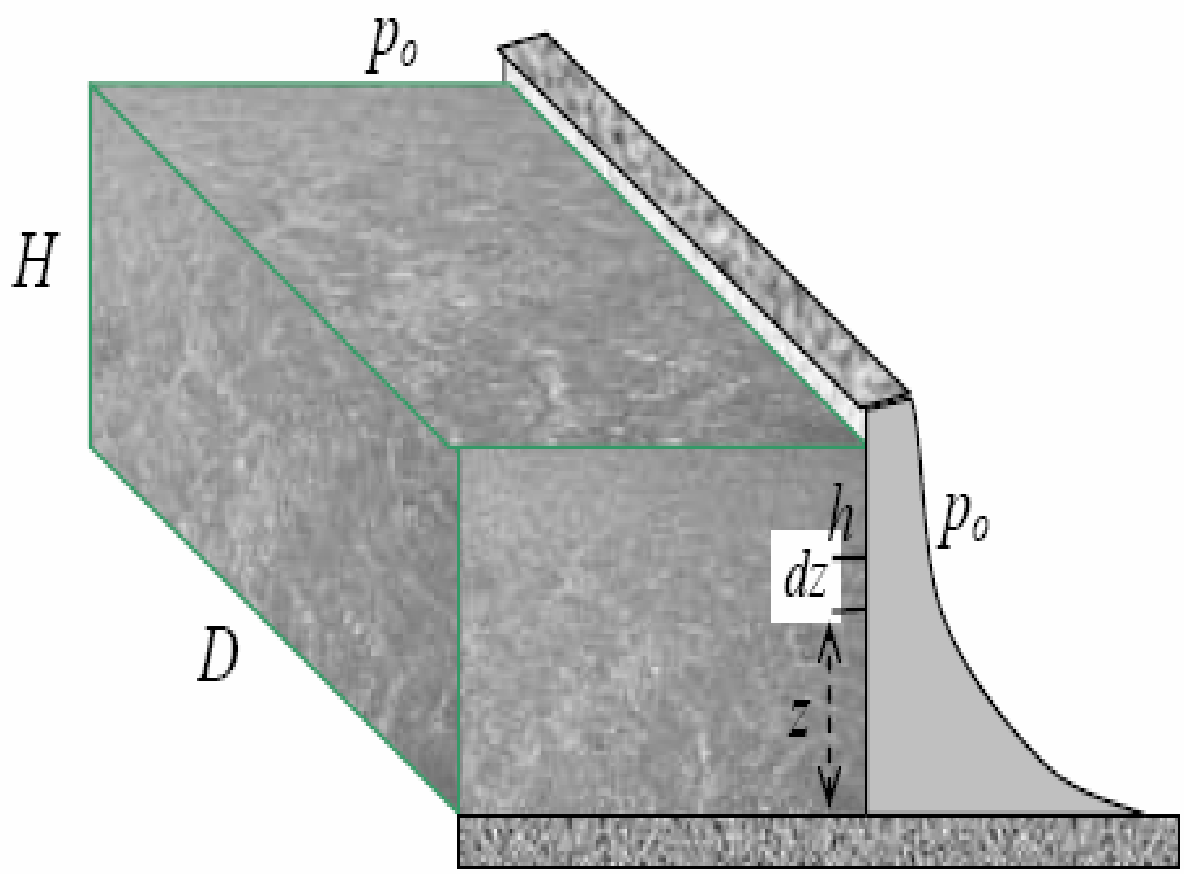


Figura 10.5. Esquema de una represa.

- La coordenada vertical z se mide desde el fondo de la represa hacia arriba, entonces la profundidad H de la represa es igual a z_o. La presión a una profundidad h medida desde la superficie del agua hacia abajo, como se ve en la figura, se calcula usando la ecuación hidrostática, teniendo en cuenta que la presión atmosférica p_o actúa en todos lados sobre la represa, por lo que no altera el valor de p, el cálculo da:

$$p - p_0 = \rho g(z_0 - z) \Rightarrow$$

$$p - p_0 = \rho g(H - z)$$

Pero $dF = (p\text{-}p_0)dA = \rho g(H\text{-}z)Ddz$, integrando se tiene,

$$F = \int dF = \int p dA = \int_0^H \rho g(H - z)Ddz = \frac{1}{2}\rho g D H^2$$

Como la presión aumenta con la profundidad, las represas se deben construir aumentando su espesor con la profundidad.

Ejemplo 10.2. *En un elevador de carga el aire comprimido ejerce una fuerza sobre un pequeño émbolo de área circular de 5 cm de radio, que se transmite por agua a otro émbolo de 20 cm de radio. Calcular la fuerza que se debe ejercer al aire comprimido para levantar un auto de 10000 N y la presión que ejercería esa fuerza.*

Solución: por la ley de Pascal, tenemos

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 = \frac{\pi 5^2}{\pi 20^2} 10000$$

$$F_1 = 625 \text{ N}$$

Notar que el valor de la fuerza necesaria, equivalente a la ejercida por una masa de 62.5 kg, es pequeña comparada con la carga a levantar.

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{625 \text{ N}}{\pi (0.05\, m)^2} = 7.9 \times 10^4 \text{ Pa} = 790 \text{hPa}$$

- *Ejemplo 10.3.* ***Calcular la fracción del volumen de un cubo de hielo que sobresale del nivel de agua, cuando flota en un vaso con agua.***

Solución: el hielo flota sobre el agua porque tiene una densidad menor que el agua, $\rho_{hielo} = 917\ kg/m^3$. El peso del cubo de hielo es $P_h = m_h g = \rho_h V_h\, g$. La fuerza de empuje igual al peso del agua desplazada es $E = \rho_a V g$, donde V es el volumen de la parte del cubo de hielo bajo el agua.

Como $P_h = E$, entonces la fracción de hielo sumergido es:

$$\rho V g = \rho_h V_h g = \rho_a V g \Rightarrow \frac{V}{V_h} = \frac{\rho_h}{\rho_a}$$

$$\frac{V}{V_h} = \frac{917}{1000} = 0.917$$

Por lo tanto, lo que sobresale del agua es: 1 - $V/V_h = 1 - 0.917 = 0.083$ u 8.3%.